SEMINAR ÜBER DEFORMATIONEN VON GALOIS-DARSTELLUNGEN

U. GÖRTZ, WS 2008/09

Einleitung

Die grundsätzliche Frage der Deformationstheorie ist die folgende: wie kann man ein gegebenes Objekt in eine "stetige Familie" ausdehnen? Diese Frage ist für geometrische Objekte sehr naheliegend, und die Deformationstheorie spielt beispielsweise in der algebraischen Geometrie eine große Rolle. Es zeigt sich aber, dass man diese geometrische Denkweise auch in der Zahlentheorie mit großem Erfolg anwenden kann.

Konkret dreht sich das Seminar um die folgende Frage: gegeben eine Galois-Gruppe G und eine Darstellung über einem endlichen Körper k, d. h. ein Homomorphismus $G \to GL_n(k)$, wie kann man diesen Homomorphismus liften in Gruppen $GL_n(A)$, wobei A beispielsweise ein Artin-Ring mit Restklassenkörper k ist.

Wir lernen zunächst den abstrakten Ansatz von Schlessinger über Deformationstheorie (der für geometrische Anwendungen ebenso nützlich ist, wie für die zahlentheoretischen, denen wir uns widmen wollen). Danach studieren wir Mazurs Theorie der Deformationen von Galois-Darstellungen. Im zweiten Teil des Seminars stellen wir die Verbindung her zur Serre-Vermutung und zu den Arbeiten von Wiles über die Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung. Dazu schauen wir den Begriff der modularen Darstellung an, und stellen einen Isomorphismus zwischen gewissen "universellen Deformationsringen" und gewissen "Hecke-Algebren" her.

Voraussetzungen. "Galois-Theorie" in einem recht weit gefassten Sinne: [Ma] §1.
Modulformen: die Grundlagen der klassischen Theorie, etwa wie in [Se2] ch. VII.

Programm

0.1. **Die Schlessinger-Kriterien.** Wir beginnen mit dem von Schlessinger in [Sch] eingeführten abstrakten Formalismus zur Deformationstheorie. Siehe auch [Ma] ch. IV.

0.2. **Deformationen von Galois-Darstellungen: der universelle Deformationsring.** Durch die Anwendung der Schlessinger-Kriterien kann man die Existenz des universellen Deformationsrings gewisser Galois-Darstellungen zeigen: [Ma] §20.

0.3. **Eigenschaften von Deformationsringen, Beispiele.** Siehe z. B. [Ma] §9, und die dort angegebenen Verweise, insbesondere [Bos].

0.4. **Der Zariski-Tangentialraum der universellen Deformation.** Wir studieren den Tangentialraum des universellen Deformationsrings, und liefern insbesondere ein Endlichkeitsergebnis, das schon vorher benutzt wurde, nach. [Ma] §§21, 22.

0.5. **Deformationsbedingungen.** Besonders wichtig ist es, nicht nur den universellen Deformationsring zu studieren, der beliebige Deformationen parametrisiert, sondern sich auf Deformationen einzuschränken, die gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllen. [Ma] §§23–25.

0.6. **Die Serre-Vermutung.** In diesem Vortrag soll ein Überblick über die Serre-Vermutung gegeben werden (der notwendigerweise skizzenhaft bleiben muss). Insbesondere ist der Begriff der modularen Darstellung einzuführen und zu diskutieren. [Ed1], [Ed2], [RS], [Se1]. Siehe auch [Win], [Kh].

0.7. **Hecke-Algebren.** Die Hecke-Algebra können wir sehen als den universellen Deformationsring für *modulare* Darstellungen. [dSh] §§2.1–2.3 bis einschl. Thm. 4.

0.8. **Hecke-Algebren und universelle Deformationsringe I.** Die Fortsetzung des vorherigen Vortrags: [dSh] §§2.3 ab Def. 3, 2.4.

0.9. **Hecke-Algebren und universelle Deformationsringe II.** Eine Auswahl aus [dSh] §§3–5.

0.10. **Die Methode von Wiles.** Falls Zeit bleiben sollte, können wir anschauen, wie das Ergebnis aus den vorherigen Vorträgen, der Isomorphismus $R_{\mathcal{D}} \cong \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ für einen *minimalen* Deformationstyp $\mathcal{D}$ verallgemeinert wird auf den Fall beliebiger Deformationstypen: [Wil], [DR].

References

[Bos] N. Boston, *Explicit deformation of Galois representations*, Invent. math. **103** (1991), 181–196.

[CSS] G. Cornell, J. Silverman, G. Stevens, *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*, Springer 1997.

[dSh] E. de Shalit, *Hecke rings and universal deformation rings*, Ch. XIV in [CSS].

[DR] F. Diamond, K. Ribet, *ℓ-adic modular deformations and Wiles' main conjecture*, Ch. XII in [CSS].

[Ed1] S. Edixhoven, *The weight in Serre's conjectures on modular forms*, Invent. math. **109** (1992), 563–594.

[Ed2] S. Edixhoven, *Serre's conjectures*, Ch. VII in [CSS].

[Kh] C. Khare, *Serre's modularity conjecture: a survey of the level one case*, in: L-functions and Galois representations, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **320**, Cambridge Univ. Press, 2007, 270–299.

[Ma] B. Mazur, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, Ch. VIII in [CSS].

[RS] K. Ribet, W. Stein, *Lectures on Serre's conjectures*, in: Arithmetic algebraic geometry (Park City, UT, 1999), IAS/Park City Math. Ser., **9**, A. M. S., 2001, 143–232.

[Sch] M. Schlessinger, *Functors on Artin rings*, Trans. A. M. S. **130** (1968), 208–222.

[Se1] J.-P. Serre, *Sur les représentations de degré 2 de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Duke Math. J. **54**, no. 1 (1987), 179–230.

[Se2] J.-P. Serre, *Cours d'Arithmétique*, Springer.

[Wil] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. **142** (1995), 553–572.

[Win] J.-P. Wintenberger, *La conjecture de modularité de Serre: le cas de conducteur 1 (d'après C. Khare)*, Sém. Bourbaki 956 (2005/2006), in: Astérisque **311** (2007), 99–121.

Anmerkungen. Eine weitere nützliche Artikel ist der Übersichtsartikel von Darmon, Diamond und Taylor über den Beweis des großen Fermatschen Satzes.